МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского»

«Утверждаю»
Проректор по учебной и методической деятельности
_______________ **Н.В. Кармазина**

ПРОГРАММА

ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ ПО СПЕЦИАЛЬНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

для поступления на обучение по образовательной программе высшего образования – программе подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре

Группа научных специальностей

1.1 МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Научная специальность
1.1.1 Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Разработчики программы:

Муратов М.А., доктор физико-математических наук, профессор Физико-технического института (структурное подразделение) ФГАОУ ВО «КФУ им. В.И. Вернадского».

Анашкин О.В. доктор физико-математических наук, профессор Физико-технического института (структурное подразделение) ФГАОУ ВО «КФУ им. В.И. Вернадского».

1. Пояснительная записка

Программа вступительного экзамена в аспирантуру по научной специальности 1.1.1 Вещественный, комплексный и функциональный анализ составлена на основе Федерального образовательного стандарта высшего образования.

Поступающий в аспирантуру должен проявить глубокие знания программного содержания теоретических дисциплин, иметь представление о фундаментальных работах и публикациях, значимых в избранной области, ориентироваться в проблематике научных дискуссий и разных точках зрения на рассматриваемые проблемы, логично излагать материал, показать навыки владения понятийно-исследовательским аппаратом применительно к области математики и механики, проявить способность к анализу исследуемого материала, свободно оперировать фактами.

Вступительный экзамен проводится в устной форме по билетам с вопросами, включенными в программу вступительного экзамена по специальной дисциплине. Экзаменационные билеты включают в себя 3 вопроса из разных разделов программы.

Время подготовки к ответу на вопросы билета – 60-90 минут.

Время опроса в устной форме – 20-30 минут.

Критерии оценивания	*Оценка по национальной шкале*
- глубокое знание всего материала, включенного в список вопросов для поступающих в аспирантуру; - свободное владение понятийным аппаратом, научным языком и терминологией; - знание основной литературы и знакомство с дополнительно рекомендованной литературой; - логически правильное и убедительное изложение ответа.	отлично
- знание ключевых проблем и основного содержания материала, включенного в список вопросов для поступающих в аспирантуру; - умение оперировать понятиями по своей тематике; - знание основополагающих работ из списка рекомендованной литературы; - в целом логически корректное, но не всегда точное и аргументированное изложение ответа.	хорошо
- фрагментарные, поверхностные знания материала, включенного в список вопросов для поступающих в аспирантуру;	удовлетворительно

- затруднения с использованием понятийного аппарата и терминологии; - недостаточное знание рекомендованной литературы; - недостаточно логичное и аргументированное изложение ответа.	
- незнание либо отрывочное представление о материале, включенном в список вопросов для поступающих в аспирантуру; - неумение оперировать понятиями по своей тематике; - плохое знание рекомендованной литературы; - неумение логически определенно и последовательно излагать ответ.	неудовлетворительно

Содержание программы

ВОПРОСЫ К ВСТУПИТЕЛЬНОМУ ЭКЗАМЕНУ

Раздел 1. Вещественный анализ

1) Меры, измеримые функции, интеграл.

Аддитивные функции множеств (меры), счетная аддитивность мер. Конструкция лебеговского продолжения. Измеримые функции. Сходимость функций по мере и почти всюду. Теоремы Егорова и Лузина. Интеграл Лебега. Предельный переход под знаком интеграла. Сравнение интегралов Лебега и Римана. Прямые произведения мер. Теорема Фубини.

2) Неопределенный интеграл Лебега и теория дифференцирования.

Дифференцируемость монотонной функции почти всюду. Функции с ограниченным изменением (вариацией). Производная неопределенного интеграла Лебега. Задача восстановления функции по ее производной. Абсолютно непрерывные функции. Теорема Радона–Никодима. Интеграл Стилтьеса.

3) Пространства суммируемых функций и ортогональные ряды.

Неравенства Гельдера и Минковского. Пространства Lp , их полнота. Полные и замкнутые системы функций. Ортонормированные системы в L2 и равенство Парсеваля. Ряды по ортогональным системам; стремление к нулю коэффициентов Фурье суммируемой функции в случае равномерно ограниченной ортонормированной системы.

4) Тригонометрические ряды. Преобразование Фурье

Условие сходимости ряда Фурье. Представление функций сингулярными интегралами. Единственность разложения функции в тригонометрический ряд. Преобразование Фурье интегрируемых и квадратично интегрируемых функций. Свойство единственности для преобразования Фурье. Теорема Планшереля. Преобразование Лапласа. Преобразование Фурье–Стилтьеса.

5) Гладкие многообразия и дифференциальные формы.

Касательное пространство к многообразию в точке. Дифференциальные формы на многообразии. Внешний дифференциал. Интеграл от формы по многообразию. Формула Стокса. Основные интегральные формулы анализа.

6) Выпуклый анализ и теория экстремальных задач

Выпуклые множества и выпуклые функции. Выпуклая оболочка множества. Субдифференциал выпуклой функции и его арифметические свойства. Аналог леммы Ферма в терминах субдифференциалов. Задачи выпуклого программирования: общая постановка, примеры и условия разрешимости. Градиентный метод и результаты о его скорости сходимости: выпуклый и невыпуклый случай.

Раздел 2. Комплексный анализ

1) Интегральные представления аналитических функций.

Интегральная теорема Коши и ее обращение (теорема Мореры). Интегральная формула Коши. Теорема о среднем. Принцип максимума модуля. Лемма Шварца. Интеграл типа Коши, его предельные значения. Формулы Сохоцкого.

2) Ряды аналитических функций. Особые точки. Вычеты.

Равномерно сходящиеся ряды аналитических функций; теорема Вейерштрасса. Представление аналитических функций степенными рядами, неравенства Коши. Нули аналитических функций. Теорема единственности. Изолированные особые точки (однозначного характера). Теорема Коши о вычетах. Вычисление интегралов с помощью вычетов. Принцип аргумента. Теорема Руше. Приближение аналитических функций многочленами.

3) Целые и мероморфные функции.

Рост целой функции. Порядок и тип. Теорема Вейерштрасса о целых функциях с заданными нулями; разложение целой функции в бесконечное произведение. Случай целых функций конечного порядка, теорема Адамара. Теорема Миттаг–Леффлера о мероморфных функциях с заданными полюсами и главными частями.

4) Конформные отображения.

Конформные отображения, осуществляемые элементарными функциями. Принцип сохранения области. Критерии однолистности. Теорема Римана. Теоремы о соответствии границ при конформных отображениях.

5) Аналитическое продолжение.

Аналитическое продолжение и полная аналитическая функция (в смысле Вейерштрасса). Понятие Римановой поверхности. Продолжение вдоль кривой. Теорема о монодромии. Изолированные особые точки аналитических функций, точки ветвления бесконечного порядка. Принцип симметрии. Формула Кристоффеля–

Шварца. Модулярная функция. Нормальные семейства функций, критерий нормальности. Теорема Пикара.

6) Гармонические функции.

Гармонические функции, их связь с аналитическими. Инвариантность гармоничности при конформной замене переменных. Бесконечная дифференцируемость. Теорема о среднем и принцип максимума. Теорема единственности. Задача Дирихле. Формула Пуассона для круга.

Раздел 3. Функциональный анализ

1) Метрические и топологические пространства.

Сходимость последовательностей в метрических пространствах. Полнота и пополнение метрических пространств. Сепарабельность. Принцип сжимающих отображений. Компактность множеств в метрических и топологических пространствах.

2) Нормированные и топологические линейные пространства.

Линейные пространства. Выпуклые множества и выпуклые функционалы, теорема Банаха–Хана. Отделимость выпуклых множеств. Нормированные пространства. Критерии компактности множеств в пространствах C и Lp. Евклидовы пространства. Топологические линейные пространства.

3) Линейные функционалы и линейные операторы.

Непрерывные линейные функционалы. Общий вид линейных ограниченных функционалов на основных функциональных пространствах. Сопряженное пространство. Слабая топология и слабая сходимость. Линейные операторы и сопряженные к ним. Пространство линейных ограниченных операторов. Спектр и резольвента. Компактные (вполне непрерывные) операторы. Теоремы Фредгольма.

4) Гильбертовы пространства и линейные операторы в них.

Изоморфизм сепарабельных бесконечномерных гильбертовых пространств. Спектральная теория ограниченных операторов в гильбертовых пространствах. Функциональное исчисление для самосопряженных операторов и спектральная теорема. Диагонализация компактных самосопряженных операторов. Неограниченные операторы.

5) Дифференциальное исчисление в линейных пространствах.

Дифференцирование в линейных пространствах. Сильный и слабый дифференциалы. Производные и дифференциалы высших порядков. Экстремальные задачи для дифференцируемых функционалов. Метод Ньютона.

6) Обобщенные функции.

Регулярные и сингулярные обобщенные функции. Дифференцирование, прямое произведение и свертка обобщенных функций. Обобщенные функции медленного роста; их преобразование Фурье. Преобразование Лапласа обобщенных функций (операционное исчисление). Структура обобщенных функций с компактным носителем.

Раздел 4. Дифференциальные уравнения

1) Основные понятия.

Фазовые пространства. Вектроные поля на прямой. Линейные уравнения. Фазовые потоки.

2) Линейные уравнения с постоянными коэффициентами.

Линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами (случай простых корней и кратных корней). Устойчные многочлены. Линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами. Метод исключения. Метод комплексных амплитуд. Нормальная линейная однородная система с постоянными коэффициентами. Автономная система дифференциальных уравнений и их фазовые пространства. Фазовая плоскость линейной однородной системы с постоянными коэффициентами.

3) Линейные уравнения с переменными коэффициентами. Теоремы существования. Устойчивость.

Нормальная система линейных уравнений. Линейное уравнение n-го порядка. Нормальная линейная система с периодическими коэффициентами. Теорема существования и единственности для одного уравнения. Теорема существования и единственности для нормальной системы уравнений. Непродолжимые решения. Непрерывная зависимость решения от начальных значений и параметров. Дифференцируемость решения по начальным данным и параметрам. Теорема Ляпунова об устойчивости.

Раздел 5. Математическая физика

1) Классификация дифференциальных уравнений с частиными производными.

Дифференциальные уравнения с двумя независимыми переменными. Классификация уравнений 2-го порядка со многими независимыми переменными. Канонические формы линейных уравнений с постоянными коэффициентами.

2) Уравнения гиперболического типа.

Простейшие задачи, приводящие к уравнениям гиперболического типа. Уравнение малых поперечных колебаний струны. Уравнение продольных колебаний стержней и струн. Граничные и начальные условия. Теорема единственности. Метод распространяющих волн. Формула Даламбера. Устойчивость решений. Полуограниченная прямая и метод продолжений. Задачи для ограниченного отрузка. Метод разделения переменных. Решение общих линейных уравнений гиперболического типа.

3) Уравнения параболического типа.

Простейшие задачи, приводящие к уравнениям гиперболического типа. Постановка краевых задач. Принцип максимального значения. Теорема единственности. Теорема единственности на бесконечной прямой. Метод разделения переменных. Задачи на бесконечной прямой.

4) Уравнения эллиптического типа.

Задачи, приводящие к уравнению Лапласа. Общие свойства гармонических функций. Формулы Грина. Задачи с разрывными граничными условиями. Интегральное представление решения. Изолированные особые точки. Решение краевых задач для простейших областей методом разделения переменных.

Литература для подготовки

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики: учеб. для вузов / В.С. Владимиров, В.В. Жаринов. — 2-е изд., стереотип. — М.: ФИЗМАЛИТ, 2004. — 400 с.
2. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. — 7-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 572 с.
3. Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. — 4-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, 1973. — 749 с.
4. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций: в 2-х т. / А.И. Маркушевич. — 2-е изд., испр. и доп. — М.: Наука, 1968. — Т.2. — 624 с.
5. Никольский С.М. Курс математического анализа: учебник для вузов / С.М. Никольский. — 6-е изд., стер. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 592 с.
6. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного: учебник / И.И. Привалов. — 15-е изд., стер. — СПб.: Лань, 2009. — 432 с.: ил.
7. Рид М. Методы современной математической физики: в 4-х т. / М. Рид, Б. Саймон. — Пер. с англ. — М.: Мир, 1977. — Т.1. — 357 с.
8. Рудин У. Основы математического анализа / У. Рудин. — Пер. с англ. — М.: Мир, 1976.— 319 с.
9. Смирнов В.И. Курс высшей математики / В.И. Смирнов. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 1959.— т. V. — 655 с.
10. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ: в 2-х ч. / Б.В. Шабат. — 2-е изд., — М.: Наука, 1976. — ч. 1.— 321 с.
11. Дьяченко М.И. Мера и интеграл / М.И. Дьяченко, П.Л. Ульянов. — 2-е изд., стереотип. — М.: Факториал, 2002. — 160 с.
12. Зорич В.А. Математический анализ: в 2-х ч. / В.А. Зорич. — 4-е изд., испр. — М.: МЦНМО, 2002. — ч. 2.— 794 с.
13. Люстерник Л.А. Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. — 2-е изд., перераб. — М.: Наука, 1965. — 520 с.: ил.
14. Рудин У. Функциональный анализ / У. Рудин. — Пер. с англ. — М.: Мир, 1975. — 444с.

15. Садовничий В.А. Теория операторов: учеб. для вузов / В.А. Садовничий. — 5-е изд., стереотип. — М.: Дрофа, 2004. — 384 с.

16. Хатсон В. Приложения функционального анализа и теории операторов / В. Хатсон, Дж. Пим. — Пер. с англ. — М.: Мир, 1983. – 432 с.

17. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974. —336 с.

18. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: МЦНМО, 2012. — 344 с.: ил.

19. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1999.

20. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Наука, 1961.

21. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. М.Наука, 1983. – 384 с.