

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**  
**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего**  
**образования «Крымский федеральный университет имени В. И. Вернадского»**

**«Утверждаю»**

Проректор по учебной и  
методической деятельности

\_\_\_\_\_ В. О. Курьянов

«\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2016 г.

**ПРОГРАММА**

**вступительного испытания по специальной дисциплине «Математика и  
механика» основной профессиональной образовательной программы  
высшего образования – программы подготовки научно-педагогических  
кадров в аспирантуре**

**Направление подготовки 01.06.01 Математика и механика**

**Направленности:** Вещественный, комплексный и функциональный анализ  
Дифференциальные уравнения, динамические системы и  
оптимальное управление  
Механика деформируемого твердого тела

Симферополь 2016 г.

## **Разработчики программы:**

1. Муратов М.А., доктор физико-математических наук, декан факультета математики и информатики, имеющий звание профессор Таврической академии (структурное подразделение) ФГАОУ ВО «КФУ им. В.И. Вернадского».
2. Белан Е.П., доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений и геометрии факультета математики и информатики, имеющий звание профессор Таврической академии (структурное подразделение) ФГАОУ ВО «КФУ им. В.И. Вернадского».
3. Копачевский Н.Д., доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математического анализа факультета математики и информатики, имеющий звание профессор Таврической академии (структурное подразделение) ФГАОУ ВО «КФУ им. В.И. Вернадского».
4. Орлов И.В., доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой алгебры и функционального анализа факультета математики и информатики, имеющий звание профессор Таврической академии (структурное подразделение) ФГАОУ ВО «КФУ им. В.И. Вернадского».
5. Чехов В.Н., доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой прикладной математики факультета математики и информатики, имеющий звание профессор Таврической академии (структурное подразделение) ФГАОУ ВО «КФУ им. В.И. Вернадского».
6. Старков П.А. кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа факультета математики и информатики, имеющий звание доцент Таврической академии (структурное подразделение) ФГАОУ ВО «КФУ им. В.И. Вернадского».

## 1. Пояснительная записка

Программа вступительных испытаний для поступления на обучение по основной профессиональной образовательной программе высшего образования – программе подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре, составлена на основании Порядка приема на обучение по образовательным программам высшего образования – программам подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре, утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 26.03.2014 № 233, Правил приема на обучение по образовательным программам высшего образования - программам подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре ФГАОУ ВО «КФУ им. В.И. Вернадского» на 2017-2018 учебный год, утвержденных приказом ректора университета от 30.09 2016 № 914 федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 01.06.01 Математика и механика (уровень подготовки кадров высшей квалификации), утвержденного приказом Министерства образования и науки РФ от 30 июля 2014 г. № 866 «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 01.06.01 Математика и механика (уровень подготовки кадров высшей квалификации)».

Форма проведения вступительного испытания – устная.

Результаты вступительного испытания оцениваются по 100-балльной шкале.

Вступительное испытание ориентировано на оценку уровня знаний, соответствующих результатам освоения основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы магистратуры (специалитета) согласно требованиям ФГОС ВО.

## 2. Содержание программы

### Тема 1. Элементы теории множеств и понятие числа

Конечные множества. Отображение множеств. Эквивалентные множества. Сравнение мощностей. Счетные множества. Теорема о мощности подмножеств. Понятие числа. Дедекиндовы сечения. ([7, гл.1], [8, гл. 1-3]).

### Тема 2. Непрерывные и дифференцируемые функции

Свойства непрерывных на компакте функций. Дифференцированные функции одной и многих переменных, их свойства. Формула Тейлора и ее применение. Исследования на экстремум и условный экстремум функций многих переменных. Дифференцируемые отображения и их свойства. ([1, гл. 1-2, 8, 9, 14, 15 ], [3, гл. 9 ], [5, гл. 1,2, 3]).

### Тема 3. Ряды

Числовые и функциональные ряды, признаки сходимости. Степенные ряды и их свойства. ([2, гл. 1], [3, гл. 7], [4, гл. 10,11]).

### Тема 4. Интеграл Римана

Понятие интеграла Римана функции одной переменной. Определенный интеграл. Условия существования. Связь с неопределенным интегралом. Применение интеграла Римана. ([1, гл. 10 ], [4, гл. 7, 9]).

Несобственные интегралы и интегралы, зависящие от параметра. Признаки сходимости несобственных интегралов. Теоремы о дифференцировании и интегрировании по параметру. ([2, гл. 1, 3]).

Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы. Теорема существования, замена переменных и вычисление кратных интегралов. Формулы Грина, Гаусса-Остроградского и Стокса. Условие независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования. ([2, гл. 4-7], [5, гл. 5, 6]).

### Тема 5. Теория меры и интеграла

Понятие алгебры и  $\sigma$ -алгебры множеств и абстрактной меры. Теорема Каратеодори о продолжении меры. Меры Лебега и Лебега - Стильеса. Измеримые функции и их свойства. Различные виды сходимости последовательности измеримых функций и их связь. Построение и свойства интеграла Лебега, сравнение с интегралом Римана. Теоремы о предельном переходе под знаком интеграла. Произведение мер и теорема Фубини. Функции ограниченной вариации и понятие заряда. Интеграл Стильеса. Абсолютно непрерывные функции. Абсолютная непрерывность и (сингулярность мер. Теорема Радона - Никодима. Дифференцирование монотонной функции. Производная от интеграла по верхнему пределу. Интегралы по произвольным мерам ([7, Ил. 3-6, 8, 9], [8, гл. 5, 6], [11, гл. 1-5]).

### Тема 6. Метрические и топологические пространства

Сходимость в метрических пространстве; полнота и пополнение. Компакты. Критерий компактности. Сжимающие отображения. Основные понятия теории топологических пространств. Примеры [8, гл. 1-5].

### **Тема 7. Функции комплексного переменного.**

Элементарные функции комплексной переменной. Условие аналитичности функции. Теорема и формула Коши. Принцип максимума модуля. Разложение в ряд Тейлора и Лорана. Классификация особых точек. Примеры простых конформных отображений. Основные теоремы о конформные отображения. Вычисление определенных интегралов с помощью вычетов. Свойство единственности аналитических функций. Аналитическое продолжение. Целые функции, их порядок и тип. Теорема Вейерштрасса. ([9, гл. 5-12, 14-15], [6, разд.8-13]).

### **Тема 8. Линейные нормированные пространства.**

Понятие линейного нормированного и гильбертовом пространств, примеры и основные свойства. Пространства  $C$ ,  $L_p$ ,  $l_p$ ; их полнота и плотные множества этих пространств. Линейные непрерывные функционалы. Теорема Хана - Банаха. Сопряженное пространство, его свойства. Слабая сходимость линейных функционалов. Слабая топология в сопряженном пространстве. Ортонормированные системы векторов в гильбертовом пространстве. Разложение вектора по ортонормированным базисам. Равенство Парсеваля. Ортогональные полиномы. Ряды Фурье и их связь с разложением вектора по ортонормированным базисам. Минимальное свойство частных сумм ряда Фурье. Условия точечной сходимости рядов Фурье по тригонометрической системе функций ([8, гл. 1 - 4, 7], [11, гл. 6-7]).

### **Тема 9. Теория операторов**

Понятие линейного непрерывного оператора, простейшие свойства таких операторов. Пространство линейных ограниченных операторов, теорема Банаха - Штейнгауза. Самосопряженные, унитарные и нормальные операторы. Ортопроекторы. Резольвента и спектр оператора. Операторы Гильберта - Шмидта и интегральные операторы. Компактные (вполне непрерывные) операторы, их свойства. Теорема Фредгольма о разрешимости уравнений с компактными операторами. Интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода, теория разрешимости. Операторы Вольтерра. Самосопряженные компактные операторы, их спектральное разложение. ([8, гл. 2, 4, 5-6, 9], [10, гл. 20], [11, гл. 8-10])

### **Тема 10. Обобщенные функции.**

Пространство  $D$  и понятие обобщенной функции. Основные операции над обобщенными функциями. Пространство  $S$  и понятия обобщенной функции медленного роста. Понятие о преобразовании Фурье. Преобразование Фурье обобщенных функций ([8, гл. 4, 8], [11, гл. 11])

## **Тема 11. Обыкновенные дифференциальные уравнения**

Определение дифференциального уравнения и его решения. Интегрируемые типы дифференциальных уравнений первого порядка. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Системы дифференциальных уравнений. Зависимость решений дифференциальных уравнений от начальных условий и параметров.

Линейные дифференциальные уравнения и системы. Фундаментальная система решений. Метод вариации произвольных постоянных. Общее решение системы с постоянными коэффициентами. Фундаментальная матрица решений. Формула Остроградского-Лиувилля.

Устойчивость по Ляпунову. Теорема об устойчивости по первому приближению. Второй метод Ляпунова, основные теоремы об устойчивости.

Краевые задачи. Функция Грина. Задача Штурма-Лиувилля. Собственные значения и собственные функции.

Автономные системы. Типы траекторий. Фазовый поток. Фазовые портреты линейных систем на плоскости. Предельные циклы. Теорема о выпрямлении векторного поля. Первые интегралы.

Дифференциальные уравнения с параметром. Элементарные бифуркации, бифуркация Андронова-Хопфа.

Динамические системы с непрерывным и дискретным временем, основные понятия. Одномерные системы. Точки покоя и периодические точки, устойчивость.

Линейные и квазилинейные уравнения в частных производных первого порядка. Характеристики и интегральные поверхности.

## **Тема 12. Уравнения математической физики**

Классификация линейных уравнений в частных производных второго порядка. Основные задачи математической физики (волновое уравнение, уравнение теплопроводности, уравнение Лапласа). Корректность постановки задач, их фундаментальные решения. Нахождение решений основных граничных задач (интеграл Пуассона для уравнений теплопроводности, функция Грина теории потенциала для круга и шара, задача Коши для волнового уравнения, формула Даламбера, функция Римана). Типы краевых условий. Смешанные задачи для гиперболических и параболических уравнений, решение уравнения колебания конечной струны. Задачи на собственные значения для эллиптических уравнений. Метод разделения переменных Фурье. Гармонические функции и их свойства. Первая и вторая формула Грина. Принцип максимума.

## **Тема 13. Элементы теории функций и функционального анализа**

Пространства основных и обобщенных функций. Основные операции. Обобщенные решения линейных дифференциальных уравнений. Преобразование Фурье и Лапласа и их приложения к решениям краевых задач.

Мера и интеграл Лебега. Интегральные уравнения. Теоремы Фредгольма и их следствия. Интегральные уравнения Вольтера и Фредгольма и их решение методом последовательных приближений. Уравнение с симметричным ядром. Теорема Гильберта-Шмидта.

Дифференцируемые отображения. Теорема об обратном отображении. Линейные пространства. Метрические пространства. Принцип сжимающих отображений. Теорема о неподвижной точке. Интегральные дифференциальные операторы и их основные свойства.

#### **Тема 14. Вариационное исчисление и оптимальное управление.**

Задачи вариационного исчисления с подвижными и неподвижными границами. Необходимые условия в форме уравнений Эйлера. Достаточные условия. Задачи оптимального управления. Принцип максимума Понтрягина для задачи оптимального быстрогодействия. Задача с закрепленным временем. Связь принципа максимума с методом динамического программирования. Уравнение Беллмана.

\*\*\*\*\*

### **Механика**

**Тема 15.** Гипотезы, цели и задачи механики деформируемого твердого тела. Понятие о сплошной деформируемой среде. Способы задания движения недеформируемого тела. Материальные координаты и задание движения деформируемой среды.

**Тема 16.** Деформирование тонкого стержня. Удлинение и поперечное сокращение стержня. Диаграмма растяжения - сжатия. Упругость и пластичность. Закон Гука при растяжении - сжатии. Температурные деформации и температурные напряжения стержня.

**Тема 17.** Обобщенный закон Гука для изотропного материала. Относительное объемное расширение. Удлинение стержня при действии собственного веса. Колонна равного сопротивления.

**Тема 18.** Дифференциальные уравнения равновесия. Закон парности касательных напряжений. Чистый сдвиг. Собственные векторы тензора напряжений. Главные напряжения. Основные инварианты тензора напряжений.

**Тема 19.** Тензор деформаций Грина. Кратности, удлинения и сдвиги. Гомотетия и простой сдвиг. Деформации при конформном отображении. Линейный тензор деформации. Обобщенный закон Гука. Дифференциальные уравнения движения в

форме Ламе. Начальные и Граничные условия. Равновесие прямоугольной призмы при действии равномерного давления.

**Тема 20.** Основные понятия из аналитической механики: Механические связи. Виртуальное (возможное) перемещение. Изохронные вариации. Обобщенная сила. Уравнение Лагранжа.

**Тема 21.** Малые колебания системы с одной степенью свободы. Устойчивость и неустойчивость. Свободные и вынужденные колебания с одной степенью свободы. Решение задач на исследование свободных и вынужденных колебаний системы с одной степенью свободы. Интегрирование нелинейных дифференциальных уравнений свободных колебаний математического маятника.

**Тема 22.** Интегральное преобразование Лапласа-Карсона. Решение задач колебаний системы с одной степенью свободы с применением преобразования Лапласа-Карсона. Разложение возмущающей силы в ряд Фурье.

**Тема 23.** Колебание системы материальных точек с конечным числом степеней свободы. Кинетическая и потенциальная энергия малых свободных колебаний консервативные системы с конечным числом степеней свободы. Уравнение малых колебаний консервативной системы с конечным числом степеней свободы около устойчивого положения равновесия.

**Тема 24.** Нормальные координаты и главные колебания. Вековое уравнение (уравнение частот). Собственные формы колебаний. Свойства собственных форм. Общий интеграл дифференциальных уравнений малых колебаний.

**Тема 25.** Свободные колебания с сопротивлением. Теорема об изменениях собственных частот системы при наложении на нее связи. Функция Рэлея. Уравнения вынужденных колебаний. Вынужденные колебания систем с внутренним неупругим сопротивлением.

**Тема 26.** Продольные и крутильные колебания прямых стержней. Поперечные колебания прямых стержней.



### 3. Литература

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа, ч. 1. - М.: Наука, 1971.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа, ч. 2. - М.: Наука, 1973.
3. Рудин У. Основы математического анализа. - М., Мир, 1976.
4. Давыдов М.А. Курс математического анализа, ч. 1. - М.: Высшая школа, 1990.
5. Давыдов М.А. Курс математического анализа, ч. 2. - М.: Высшая школа, 1991.
6. Давыдов М.А. Курс математического анализа, ч. 3. - М.: Высшая школа, 1992.
7. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. - М.: Наука, 1974.
8. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. - М.: Наука, 1972.
9. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ, ч.1. - М.: Наука, 1985.
10. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1981.
11. Березанский Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Ф. Функциональный анализ. Курс лекций. - К.: Высшая школа, 1990.
12. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - М.: Наука, 1974.
13. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - М.: Наука, 1980.
14. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1980.
15. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1972.
16. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1971.
17. Петровский И.Г. Лекции по теории интегральных уравнений. - М.: Наука, 1965.
18. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. - М.: Наука, 1989.
19. Треногин В.А. Функциональный анализ. - М.: Наука, 1980.

20. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
21. Коддингтон Э.А. Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1958.
22. Демидович В.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
23. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1975.
24. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.
25. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976.
26. Гукенхаймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. Москва, Ижевск. Институт компьютерных исследований. 2002.
27. Ю.Н. Работнов. Механика деформируемого твердого тела. - М.: Наука, 1988. - 712 с.
28. Введение в механику сплошных сред: Учеб пособие / Черных К.Ф., Алешков Ю.З., Понятовский В.В., Шамина В.А. - Л.: Изд - во Ленингр. ун-та, 1984. 280 с.
29. С.П. Тимошенко. Курс теории упругости. - Киев: Наукова думка, 1972. - 508 с.
30. Н.И. Мусхелишвили. Некоторые основные задачи математической теории упругости. - М.: Наука, 1966. - 707 с.
31. Х. Хан. Теория упругости. Основы линейной теории и ее применения: Пер. с немецкого. - М.: Мир, 1988. - 344 с.
32. Л.И. Седов. Механика сплошной среды. Т. 1, 2. - М.: Наука, 1976г. - 536с., 576 с.
33. Дж. Мейз. Теория и задачи механики: Пер. с английского. - М.: Мир, 1974. - 320 с.
34. А.А. Ильюшин, В.А. Ломакин, А.П. Шмаков. Задачи и упражнения по механике сплошной среды. - М.: Изд - во Моск. ун-та, 1979. - 200 с.

35. Н.И. Безухов. Примеры и задачи по теории упругости, пластичности и ползучести упражнения по механике сплошной среды. - М.: Высшая школа, 1965. - 320 с.
36. В.Г. Рекач. Руководство к решению задач по теории упругости. - М.: Высшая школа, 1977. - 216 с.
37. В.Г. Рекач. Руководство к решению задач прикладной теории упругости. - М.: Высшая школа, 1984. - 287 с.
38. Л.М. Бреховских, В.В. Гончаров. Введение в механику сплошных сред в приложении к теории волн. - М.: Наука, 1982. - 337 с.
39. И.М. Бабаков. Теория колебаний. «Наука», Москва, 1968г.
40. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. Под ред. А. А. Яблонского, «Высшая школа», 1985г.
41. А.А. Яблонский, С.С. Норейко. Курс теории колебаний. «Высшая школа», 1983г.
42. Н. В. Бутенин. Теория колебаний. «Наука», Москва, 1965г
43. Я. Г. Пановко. Введение в теорию механических колебаний. «Наука», Москва, 1971г